Programme de colles n°18

semaine du 12 au 16 février

Notions vues en cours

Chapitre 18 : Matrices *(en complément des semaines précédentes)*

- Pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, formules $(A^{-1})^{-1} = A$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Matrice transposée, notation $A^\top$, l'application $A \mapsto A^\top$ est involutive et “linéaire”, formule $(AB)^\top = B^\top A^\top$, la transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée
- Matrice symétrique, matrice antisymétrique, notation $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls

Chapitre 19 : Systèmes linéaires

- Système linéaire : définition, coefficients, second membre, système homogène associé, système (in)compatible
- Matrice associée à un système, écriture matricielle, structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire
- Opération élémentaire sur les lignes (dilatation, permutation, transvection)
- Système équivalent, toute opération élémentaire transforme un système en un système équivalent
- Matrice échelonnée, matrice augmentée d'un système, pivot, algorithme du pivot de Gauss
- Matrice échelonnée réduite, variable pivot, variable libre, obtention de l'ensemble des solutions
- Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot (avec une matrice augmentée ayant I_n à droite)
- CNS d'inversibilité des matrices diagonales / triangulaires, et forme des matrices inverses

Chapitre 20 : Polynômes (Partie A)

- Polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, coefficients, polynôme nul, méthode d'identification
- Degré d'un polynôme, notation $\deg P$, $\deg(0) = -\infty$, polynôme constant (identifié à un élément de $\mathbb{K}$)
- Écriture dite développée : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, cela entraine que $\deg P \leq n$, ensemble $\mathbb{K}_n[X]$
- Écriture dite normalisée : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, cela entraine que $\deg P = n$, coefficient dominant, polynôme unitaire, monôme
- Opération $+$ et $\lambda\cdot$ sur $\mathbb{K}[X]$, degré de $P+Q$, de λP, $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe
- Opération $\times$ sur $\mathbb{K}[X]$, degré de PQ, $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre (avec les conséquences que cela entraine), les inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0, bilinéarité du produit
- Puissance d'un polynôme, degré de P^n, calcul dans un anneau version polynômes

Pour les exercices, la priorité est donnée aux systèmes linéaires. Il faut être capable de donner l'ensemble des solutions sous forme paramétrique (par exemple $\mathcal{S} = \{(1+y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$).

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Transposée d'un produit de deux matrices Chapitre 18, Propriété 18.24
- Degré de la somme de deux polynômes Chapitre 20, Propriété 20.10
- Degré du produit de deux polynômes Chapitre 20, Propriété 20.13